

B 25

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

Ю.А.Вдовин, В.М.Галицкий

**Кинетические уравнения для фотонов
в резонансной среде**



НОВОСИБИРСК 1965

✓

А н н о т а ц и я.

Исследуется поведениа кванта в строго резонансной системе молекул, при условии, что в начальный момент имелся или заданный фотон, или квант среды. Учитываются, как процессы ухода фотонов из данного состояния, так и процесса прихода. Находится функция распределения фотонов по энергии. . Строятся соответствующие кинетические уравнения.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФОТОНОВ В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ.

Ю.А.Вдовин, В.М. Галицкий

I. Введение.

В работе / I / было исследовано поведение фотона в системе строго резонансных молекул. Были введены кванты среды и показано, что лишь в очень разреженных средах эти кванты среды распадаются на индивидуальные возбуждения отдельных молекул и фотоны, было исследовано затухание возбуждений и определена запаздывающая функция распространения фотона. Однако, найденная в работе / I / вероятность $|\overline{f_\lambda(\vec{k}, t)}|^2$ нахождения данного фотона в момент времени t , усредненная по расположению молекул среды, убывала во времени. Это обстоятельство связано с тем, что в работе / I / усреднялась сама амплитуда $f_\lambda(\vec{k}, t)$, а не её квадрат модуля. Тем самым были учтены процессы ухода фотонов из данного состояния, но не учитывались процессы прихода. В настоящей работе проведено полное исследование кинетики процесса и сформулированы соответствующие кинетические уравнения.

II. Распределение квантов по энергии.

Найдем распределение фотонов по энергии в произвольный момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t=0$ в системе имелся один фотон \vec{k}_0, λ_0 , т.е. волновая функция имела вид

$c_{\vec{k}_0, \lambda_0}^+ |0\rangle$. Среднее число фотонов в состоянии \vec{k}, λ определяется, согласно (I.15) формулой (все ссылки на формулы работы / I / мы будем отмечать римской цифрой I)

$$n_{\vec{k}, \lambda}(t) = \overline{|f_\lambda(\vec{k}, t)|^2} \quad (I)$$

Черта означает усреднение по положению молекул среды. Амплитуда $f_\lambda(\vec{k}, t)$, вернее её лапласовский образ $f_\lambda(\vec{k}, \omega)$ удовлетворяет уравнению (I.20). При выполнении усреднения величины $|f_\lambda(\vec{k}, \omega)|^2$ возникают средние от операторов \hat{J}_+ , входящих в одну функцию f или f^* и средние от операторов \hat{J}_- , принадлежащих функциям f и f^* . Учет первых средних приводит к появлению функции G , вычисленной в

работе / I / (см. (I.25) и (I.34)). Во временном представлении эта функция затухает ((I.53), (I.54)), что связано с процессом ухода квантов из начального состояния. Этот процесс компенсируется процессом прихода из других состояний, который является результатом усреднения операторов \hat{J} , входящих в разные функции Грина.

В представлении Лапласа формула (I) имеет вид

$$n_{\vec{k}\lambda}(t) = \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \overline{f_{\lambda}(\vec{k}, \omega) f_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega')} e^{-i(\omega+\omega')t} =$$

$$= \int \frac{d\omega d\omega_1}{(2\pi)^2} \overline{f_{\lambda}(\vec{k}, \omega) f_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega_1 - \omega)} e^{-i\omega_1 t} = \int \frac{d\omega_1}{2\pi} n_{\vec{k}\lambda}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t}$$

где $\omega_1 = \omega + \omega'$, а функция $f_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega')$ является лапласовским образом функции $f_{\lambda}^*(\vec{k}, t)$.

Мы обозначим, аналогично (I.25)

$$\overline{f_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega')} = -i G_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega') \quad (3)$$

Функция G_{λ}^+ определяется рядом (см. (I 26))

$$G_{\lambda}^+ = G_0^+ + G_0^+ \frac{\hat{J}^*}{-\omega' - \omega_0} G_0^+ + G_0^+ \frac{\hat{J}^*}{-\omega' - \omega_0} G_0^+ \frac{\hat{J}^*}{-\omega' - \omega_0} G_0^+ + \dots \quad (4)$$

где

$$G_0^+(\omega_k, \omega') = - \frac{1}{\omega' + \omega_k} \quad (5)$$

Для функции $G_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega')$ получаем, аналогично (I 34)

$$G_{\lambda}^+(\vec{k}, \omega') = G^+(\omega_k, \omega') \delta_{\vec{k}, \vec{k}_0} \delta_{\lambda, \lambda_0} = - \frac{\delta_{\vec{k}, \vec{k}_0} \delta_{\lambda, \lambda_0}}{\omega' + \omega_k - [4\tau^2(\omega' + \omega_0 + \frac{1}{2}iW)]^{-1}}$$

где

$$W = \frac{2}{3} |Q_k|^2 \frac{\omega_0^2 V}{\mathcal{F} c^3}; \quad \frac{1}{4\tau^2} = \frac{|Q_k|^2 N}{3} = \frac{\mathcal{F}}{2} \rho \lambda^3 W \omega_0 \quad (7)$$

и $\rho = N/V$ — плотность молекул среды. $1/W$ — время жизни изолированной молекулы в возбужденном состоянии.

Введем функцию $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}(\vec{k}, \omega, \omega_1; \vec{k}_0)$, определенную, как

$$\overline{\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}(\vec{k}, \omega, \omega_1; \vec{k}_0)} = \overline{f_\lambda(\vec{k}, \omega) f_{\lambda_0}^+(\vec{k}, \omega_1 - \omega)} \quad (8)$$

где черта означает усреднение по координатам молекул.

Используя опять графическую технику, мы найдем, что функция $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}$ представляется суммой всевозможных графиков, в которых надо учитывать связи как между узлами, взятыми на одной линии, так и между узлами, взятыми на разных линиях.

Изобразим графически функцию $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}$ в виде (рис. 1). Кроме того введем функцию \mathcal{K}^0 , изображенную на рис. 2.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) &= G(\omega_k, \omega) G^+(\omega_k, \omega_1 - \omega) = \\ &= \frac{1}{\omega - \omega_k - [4\tau^2(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)]^{-1}} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_1 - \omega_k - [4\tau^2(\omega - \omega_1 - \omega_0 - \frac{1}{2}iW)]^{-1}} \end{aligned} \quad (9)$$

Используя графическую технику, развитую в работе / 1 /, мы можем для функции \mathcal{K} составить следующее графическое уравнение (рис. 3). В аналитической форме оно имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}(\vec{k}, \omega, \omega_1; \vec{k}_0) &= \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \delta_{\vec{k}\vec{k}_0} \delta_{\lambda, \lambda_0} + \\ &+ \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \sum_{\vec{k}'\lambda'} U_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}') \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}(\vec{k}', \omega, \omega_1; \vec{k}_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Ядро $U_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}')$ выражается через сумму всех возможных графиков, которые нельзя разделить на части, соединенные лишь двумя сплошными линиями. В приближении, использованном нами в работе / I / при вычислении собственно-энергетической части Σ , ядро U определяется графиком рис. 4. (Заметим, что вдоль стрелок сохраняется разность импульсов по верхней и нижней линиям)

$$U_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{\sum_j |Q_{\vec{k}\lambda}^j|^2 \cdot |Q_{\vec{k}'\lambda'}^j|^2}{(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)(\omega - \omega_0 - \omega_1 - \frac{1}{2}iW)} \quad (11)$$

Нас будет интересовать функция \mathcal{K} , усредненная по начальным поляризациям фотона и просуммированная по его конечным поляризациям. Кроме того, мы не будем интересоваться угловым распределением фотонов и поэтому усредним функцию \mathcal{K} по направлениям вектора \vec{k} . Тогда имеем

$$U = \frac{N}{9} \frac{|Q_k|^2 |Q_{k'}|^2}{(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)(\omega - \omega_0 - \omega_1 - \frac{1}{2}iW)} \quad (12)$$

а уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\omega_k, \omega, \omega_1) &= \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \frac{1}{\rho_k} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \\ &+ \frac{2}{9} |Q_k|^2 \cdot N \cdot \frac{\mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \int |Q_{k'}|^2 \rho_{k'} \mathcal{K}(\omega_{k'}, \omega, \omega_1) d\omega_{k'}}{(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)(\omega - \omega_1 - \omega_0 - \frac{1}{2}iW)} \end{aligned} \quad (13)$$

где ρ_k — плотность состояний в \vec{k} — пространстве

$$\rho_k = \frac{\omega_k^2 V}{2\pi^2 c^3}$$

$$\mathcal{K}(\omega_k, \omega, \omega_1) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \lambda_0} \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{K}_{\lambda \lambda_0}(\vec{k}, \omega, \omega_1, \vec{k}_0) d\Omega_k \quad (14)$$

Найдем решение уравнения (13) сначала в области $W\tau \gg 1$. В этом случае, согласно (9) и (137) - (139)

$$\mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) = \frac{1}{(\omega - \omega_k + \frac{1}{2}i\Gamma)(\omega - \omega_1 - \omega_k - \frac{1}{2}i\Gamma)} \quad (15)$$

и

$$\Gamma = \frac{1}{4\tau^2} \frac{W}{\Delta^2 + \frac{1}{4}W^2}$$

Из этого выражения видно, что ω отличается от ω_k на величину Γ . Такой же порядок имеет и величина ω_1 . Учитывая, что $\Gamma \ll W$, множитель в знаменателе интегрального члена в уравнении (12) можно представить в виде

$$(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)(\omega - \omega_1 - \omega_0 - \frac{1}{2}iW) \cong \Delta^2 + \frac{1}{4}W^2$$

где $\Delta = \omega_k - \omega_0$

Умножая уравнение (13) на $|Q_k|^2 \rho_k$ и интегрируя по $d\omega_k$, легко находим

$$\int |Q_k|^2 \rho_k d\omega_k = \frac{|Q_{k_0}|^2 \mathcal{K}^0(\omega_{k_0}, \omega, \omega_1)}{1 - \frac{i\Gamma}{\omega_1 + i\Gamma}} = |Q_{k_0}|^2 \mathcal{K}^0(\omega_{k_0}, \omega, \omega_1) \frac{\omega_1 + i\Gamma}{\omega_1} \quad (16)$$

Подставляя это выражение в (13), получаем

$$\mathcal{K}(\omega_k, \omega, \omega_1) = \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \frac{1}{\rho_k} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \frac{2}{9} \frac{|Q_k|^2 |Q_{k_0}|^2 N}{\Delta^2 + \frac{1}{4}W^2} \mathcal{K}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \mathcal{K}^0(\omega_{k_0}, \omega, \omega_1) \frac{\omega_1 + i\Gamma}{\omega_1} \quad (17)$$

Соотношение (17) определяет $\mathcal{K}(\omega_k, \omega, \omega_1, \dots)$, как функцию лапласовских переменных ω и ω_1 . Лапласовские образы определены в верхней полуплоскости комплексных переменных ω, ω_1 . В нижней полуплоскости необходимо пользоваться аналитическим продолжением полученных выражений. Обозначим через $n(\omega_k, t) d\omega_k$ среднее число фотонов, приходящееся на интервал $d\omega_k$. Лапласовский образ $n(\omega_k, \omega_1)$ функции $n(\omega_k, t)$ мы получим, умножив соотношение (17) на ρ_k и проинтегрировав его по $d\omega/2\pi$ (см (2)).

Имея в виду (7), получим

$$n(\omega_k, \omega_1) = \frac{i}{\omega_1 + i\Gamma} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \frac{i\Gamma}{\pi[\mathcal{X}^2 + (\Gamma - i\omega_1)^2]} \omega_1 \quad (18)$$

где $\mathcal{X} = \omega_k - \omega_{k_0}$

Перейдем к временному представлению

$$n(\omega_k, t) d\omega_k = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} n(\omega_k, \omega_1) e^{-i\omega_1 t} \frac{d\omega_1}{2\pi} \right] d\omega_k = \quad (19)$$

$$= e^{-\Gamma t} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) d\omega_k + \frac{\Gamma d\omega_k}{\pi(\mathcal{X}^2 + \Gamma^2)} \left[1 - e^{-\Gamma t} \left(\cos \mathcal{X} t + \frac{\Gamma}{\mathcal{X}} \sin \mathcal{X} t \right) \right]$$

Мы видим, что время релаксации квантов дается величиной $1/\Gamma$. Для больших времен распределение становится стационарным и имеет вид

$$n(\omega_k) d\omega_k = \frac{\Gamma d\omega_k}{\pi[(\omega_k - \omega_{k_0})^2 + \Gamma^2]} \quad (20)$$

Из этого соотношения видно, что энергии квантов разбросаны относительно первоначальной энергии ω_{k_0} на величину Γ , т.е. на величину, обратную времени свободного пробега, хотя ширина резонанса равна \mathcal{W} - времени жизни изолированной молекулы.

Распределение (19) нормировано, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\int n(\omega_k, t) d\omega_k = 1 \quad (21)$$

Рассмотрим теперь область $W\tau \ll 1$. В этом случае функция $\mathcal{K}^\circ(\omega_k, \omega, \omega_1)$ имеет, согласно (9) и (I. 4I) вид:

$$\mathcal{K}^\circ(\omega_k, \omega, \omega_1) = \frac{(\omega - \omega_0 + \frac{1}{2}iW)(\omega - \omega_1 - \omega_0 - \frac{1}{2}iW)}{(\omega - \omega_+ + \frac{1}{2}iW_+)(\omega - \omega_- + \frac{1}{2}iW_-)(\omega - \omega_1 - \omega_+ - \frac{1}{2}iW_+)(\omega - \omega_1 - \omega_- - \frac{1}{2}iW_-)} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\Omega, & W_+ &= \frac{1}{2}W(1 - \frac{\Delta}{\Omega}), & \Delta &= \omega_k - \omega_0, \\ \omega_- &= \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\Omega, & W_- &= \frac{1}{2}W(1 + \frac{\Delta}{\Omega}), & \Omega &= \sqrt{\Delta^2 + \frac{1}{\tau^2}} \end{aligned} \quad (23)$$

Функции $\omega_{+,-}$, $W_{+,-}$, Δ , Ω зависят от величины ω_k . В тех случаях, когда не может возникнуть недоразумений мы будем опускать индекс, указывающий эту зависимость.

Как видно из формул (23) ω_+ и ω_- отличаются на величину порядка $(1/\tau) \gg W$. Поэтому функция \mathcal{K}° имеет резко выраженные максимумы в различных по ω, ω_1 областях, причем расстояния между максимумами существенно больше их вершин. Исходя из этого функцию \mathcal{K}° удобно представить в виде следующей суммы

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\circ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{(\omega - \omega_+ + \frac{iW_+}{2})(\omega - \omega_1 - \omega_+ - \frac{iW_+}{2})} + \\ &+ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{(\omega - \omega_- + \frac{iW_-}{2})(\omega - \omega_1 - \omega_- - \frac{iW_-}{2})} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega^2\tau^2} \frac{1}{(\omega - \omega_+ + \frac{iW_+}{2})(\omega - \omega_1 - \omega_- - \frac{iW_-}{2})} + \frac{1}{4\Omega^2\tau^2} \frac{1}{(\omega - \omega_- + \frac{iW_-}{2})(\omega - \omega_1 - \omega_+ - \frac{iW_+}{2})} \end{aligned} \quad (24)$$

Это разбиение имеет достаточно простой физический смысл. В области $W\tau \ll 1$ естественными физическими объектами являются кванты электромагнитного поля в среде / I /. Кванты поля в пустоте являются супер-

позицией этих квантов. Именно, для G функции имеет место соотношение (см. (I 49))

$$G(\omega_k, \omega) = \sum_{r=1}^2 |v_k^{(r)}|^2 G_{\alpha_r}(\omega_k, \omega) \quad (25)$$

где

$$v_k^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega}\right)} ; \quad v_k^{(2)} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega}\right)}$$

Аналогичное разложение имеет место и для функции G^+ . Отсюда и вытекает соотношение (24) для функции \mathcal{K}^0 .

Если бы в начальный момент имелся один квант среды первого или второго типа, т.е. если бы начальное состояние описывалось бы не функцией $c_{k\lambda}^+ |0\rangle$, а функцией $\alpha_{k\lambda}^{(1)+} |0\rangle$ или $\alpha_{k\lambda}^{(2)+} |0\rangle$, то функция \mathcal{K}^0 имела бы вид \mathcal{K}_{11}^0 или \mathcal{K}_{22}^0 , где

$$\mathcal{K}_{11}^0 = \frac{1}{\left(\omega - \omega_+ + \frac{iW_+}{2}\right) \left(\omega - \omega_1 - \omega_+ - \frac{iW_+}{2}\right)} \quad (26)$$

$$\mathcal{K}_{22}^0 = \frac{1}{\left(\omega - \omega_- + \frac{iW_-}{2}\right) \left(\omega - \omega_1 - \omega_- - \frac{iW_-}{2}\right)}$$

Соотношение (24) разумно записать в форме

$$\mathcal{K}^0 = \sum_{r_1, r_2} |v^{(r_1)}|^2 |v^{(r_2)}|^2 \mathcal{K}_{r_1 r_2}^0 \quad (27)$$

Сделаем аналогичное разбиение для функции \mathcal{K}

$$\mathcal{K} = \sum_{r_1, r_2} |v^{(r_1)}|^2 |v^{(r_2)}|^2 \mathcal{K}_{r_1 r_2} \quad (28)$$

$\mathcal{K}_{r_1 r_2}$ - представляет собой матрицу плотности фотонов среды по индексам $r_1 r_2$.

По определению функции $\mathcal{K}_{r_1 r_2}$ удовлетворяют уравнениям (см. (I.3))

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r_1 r_2}(\omega_k, \omega, \omega_1) &= \mathcal{K}_{r_1 r_2}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \frac{1}{\rho_k} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \\ &+ \frac{2}{9} \frac{|Q_k|^2 N (-1)^{r_1+r_2}}{\Omega^2 |v_k^{(r_1)}|^2 |v_k^{(r_2)}|^2} \mathcal{K}_{r_1 r_2}^0(\omega_k, \omega, \omega_1) \int |Q_{k'}|^2 \mathcal{K}(\omega_{k'}, \omega, \omega_1) \rho_{k'} d\omega_{k'} \end{aligned} \quad (29)$$

В уравнении для функции $\mathcal{K}_{r_1 r_2}$ наибольший вклад в интеграл, стоящий справа, дает функция $\mathcal{K}_{r_1 r_2}$. Уравнения для функций $\mathcal{K}_{r_1 r_2}$ можно также получить, основываясь непосредственно на уравнениях (I.45)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r_1 r_2}(\omega_k, \omega, \omega') &= \mathcal{K}_{r_1 r_2}^0(\omega_k, \omega, \omega') \frac{1}{\rho_k} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \\ &+ \frac{8}{9} N |Q_k|^2 v_k^{(r_1)} v_k^{(r_2)} \mathcal{K}_{r_1 r_2}^0(\omega_k, \omega, \omega') \int d\omega_{k'} \rho_{k'} |Q_{k'}|^2 \tau^2 \Omega'^2 v_{k'}^{(r_2')} v_{k'}^{(r_1')} \times \\ &\times \mathcal{K}_{r_1' r_2'}^0(\omega_{k'}, \omega, \omega') \mathcal{K}_{r_1 r_2}(\omega_k, \omega, \omega'), \end{aligned} \quad (30)$$

где $r_1' = 3 - r_1$, $r_2' = 3 - r_2$

Последнее выражение непосредственно следует из уравнений (I.45) для функций $\eta_\lambda^{(1)}(\vec{k}, \omega)$ и $\eta_\lambda^{(2)}(\vec{k}, \omega)$ и уравнений для функций $\eta_\lambda^{(1)+}(\vec{k}, \omega_1 - \omega)$ и $\eta_\lambda^{(2)+}(\vec{k}, \omega_1 - \omega)$, отличающихся от уравнений (I.45) заменой $\hat{j} \rightarrow \hat{j}^*$

$\omega - \omega_+ \rightarrow \omega_1 - \omega + \omega_+$, $\omega - \omega_- \rightarrow \omega_1 - \omega + \omega_-$

Из вида уравнений (30) следует, что в процессе распространения тип кванта среды (первого или второго типа) не изменяется. Этот результат естественен с физической точки зрения. Разброс энергий квантов, связанный с процессом релаксации, имеет ширину порядка W , в то время как разность энергий квантов первого и второго типа порядка $(1/\tau) \gg W$.

Решение уравнений (30) находится аналогично (17). При этом самостоятельный интерес представляют функции χ_{11} и χ_{22} , так как они дают распределение квантов среды первого и второго типа, когда в начальный момент имелся один квант соответственно того или иного типа. Эти функции проинтегрированные по $d\omega/2\pi$ совпадают с решением (18), (19) при замене Γ на W_+ или W_- и ω_k, ω_{k_0} на $\omega_{+k}, \omega_{+k_0}$ или $\omega_{-k}, \omega_{-k_0}$. Например, для числа квантов первого типа n_{11} , при одном кванте вначале, имеем

$$n_{11}(\omega_k, \omega_1) d\omega_k = \frac{i}{\omega_1 + iW_+} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) d\omega_k + \frac{iW d\omega_k}{4\pi\Omega^2\tau^2 [\alpha_+^2 + (W_+ - i\omega_1)^2] \omega_1} \quad (31)$$

где

$$\alpha_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega} \right) \alpha = \omega_{+k} - \omega_{+k_0} \quad (32)$$

и во временном представлении

$$n_{11}(\omega_k, t) d\omega_k = e^{-W_+ t} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) d\omega_k + \frac{W}{4\pi\Omega^2\tau^2 (\alpha_+^2 + W_+^2)} \left[1 - e^{-W_+ t} \left(\cos \alpha_+ t + \frac{W_+}{\alpha_+} \sin \alpha_+ t \right) \right] d\omega_k \quad (33)$$

Для числа фотонов, приходящихся не на интервал $d\omega_k$, а на интервал частот $d\omega_+$ получается распределение, аналогичное (19)

$$n_{11}(\omega_+, t) d\omega_+ = e^{-W_+ t} \delta(\omega_{+k} - \omega_{+k_0}) d\omega_+ + \frac{W_+ d\omega_+}{\Gamma (\alpha_+^2 + W_+^2)} \left[1 - e^{-W_+ t} \left(\cos \alpha_+ t + \frac{W_+}{\alpha_+} \sin \alpha_+ t \right) \right] \quad (34)$$

При временах, больших по сравнению с временем релаксации, распределение имеет вид

$$n_{11}(\omega_k, t) d\omega_k = \frac{W \frac{\Omega - \Delta}{\Omega + \Delta} d\omega_k}{\mathcal{F}\left[(\omega_k - \omega_{k_0})^2 + \left(\frac{\Omega - \Delta}{\Omega + \Delta}\right)^2 W^2\right]} = \frac{W_+ d\omega_+}{\mathcal{F}\left[(\omega_+ - \omega_{+k_0})^2 + W_+^2\right]} \quad (35)$$

Мы видим, что ширина распределения по энергии определяется величиной W_+ , т.е. обратным временем релаксации кванта.

Отметим, что распределения (33), (34) нормированы,

$$\int n_{11}(\omega_k, t) d\omega_k = \int n_{11}(\omega_+, t) d\omega_+ = 1 \quad (36)$$

т.е. полное число квантов первого типа сохраняется во времени.

Если бы в начальный момент имелся бы квант среды не первого, а второго типа, то все результаты (31) - (36) сохранились бы с заменой

$$\omega_+ \rightarrow \omega_-, W_+ \rightarrow W_-, \mathcal{X}_+ \rightarrow \mathcal{X}_- = \omega_k - \omega_{-k_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega}\right) \mathcal{X}$$

Аналогичным образом из уравнений (30) находятся функции $n_{12}(\omega_k, t)$ и

$$n_{21}(\omega_k, t) = n_{12}^*(\omega_k, t) \quad (37)$$

Например, для функции $n_{12}(\omega_k, t)$ при $t \gg \tau$ имеем

$$n_{12}(\omega_k, t) = e^{-i\Omega t - \frac{W_+ t}{2}} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \frac{W e^{-i(\Omega + \frac{\mathcal{X}\Delta}{2\Omega})t - \frac{W}{2}t}}{\mathcal{F}(\mathcal{X}^2 + W^2)} \left\{ \cos \frac{\mathcal{X}}{2} t - \frac{W}{\mathcal{X}} \sin \frac{\mathcal{X}}{2} t - e^{-\frac{W}{2} \left(1 - \frac{|\Delta|}{\Omega}\right) t} \left(\cos \frac{\mathcal{X}\Delta}{2\Omega} t - \frac{W}{\mathcal{X}} \sin \frac{\mathcal{X}|\Delta|}{2\Omega} t \right) \right\} \quad (38)$$

причем Ω и Δ здесь зависят от ω_{k_0} .

В отличие от функций n_{11} и n_{22} эти величины стремятся к нулю при $t \gg \frac{1}{W}$. Стремление к нулю недиагональных элементов матрицы плотности характерно для процессов релаксации (см. например, / 2 /).

Если в начальный момент имелся пустотный фотон $C_{\vec{k}_0, \lambda_0}^+ |0\rangle$, то для среднего числа фотонов в момент времени t имеем, согласно (28),

(34), (38) (Последний член справедлив при $t \ll \tau$ и $t \gg \tau$)

$$\begin{aligned}
 n(\omega_k, t) d\omega_k &= \sum_{r_1, r_2} |v_k^{(r_1)}|^2 |v_k^{(r_2)}|^2 n_{r_1 r_2}(\omega_k, t) d\omega_k = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 e^{-W_+ t} + \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 e^{-W_- t} + \frac{2e^{-\frac{W}{2} t}}{\Omega^2 \tau^2} \cos \Omega t \right\} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) d\omega_k + \\
 &+ \frac{W d\omega_k}{4\pi \Omega^2 \tau^2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + W^2 \left(\frac{\Omega - \Delta}{\Omega + \Delta}\right)^2} \left[1 - e^{-W_+ t} \left(\cos \alpha_+ t + \frac{W_+}{\alpha_+} \sin \alpha_+ t \right) \right] + \right. \\
 &+ \frac{1}{\alpha^2 + W^2 \left(\frac{\Omega + \Delta}{\Omega - \Delta}\right)^2} \left[1 - e^{-W_- t} \left(\cos \alpha_- t + \frac{W_-}{\alpha_-} \sin \alpha_- t \right) \right] + \\
 &+ \frac{2e^{-\frac{W}{2} t} \cos \left(\Omega + \frac{\alpha \Delta}{2\Omega} \right) t}{\alpha^2 + W^2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} t - \frac{W}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} t - e^{-\frac{W}{2} \left(1 - \frac{|\Delta|}{\Omega}\right) t} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\cos \frac{\alpha \Delta}{2\Omega} t - \frac{W}{\alpha} \sin \frac{\alpha |\Delta|}{2\Omega} t \right) \right] \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Это выражение может быть получено и непосредственно из уравнения (13).

Мы видим, что в этом случае все релаксационные времена порядка $1/W$. Распределение фотонов при $t \gg (1/W)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 n(\omega_k, t) d\omega_k &= \frac{W d\omega_k}{4\pi \Omega^2 \tau^2} \left\{ \frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_0})^2 + W^2 \left(\frac{\Omega - \Delta}{\Omega + \Delta}\right)^2} + \frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_0})^2 + W^2 \left(\frac{\Omega + \Delta}{\Omega - \Delta}\right)^2} \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{W_+ (\Omega + \Delta)^2}{4\pi \Omega^2} \frac{d\omega_+}{(\omega_{+k} - \omega_{+k_0})^2 + W_+^2} + \frac{W_- (\Omega - \Delta)^2}{4\pi \Omega^2} \frac{d\omega_-}{(\omega_{-k} - \omega_{-k_0})^2 + W_-^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Для полного числа квантов мы имеем

$$n = \int n(\omega_k, t) d\omega_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega^2} + \frac{1}{\tau^2 \Omega^2} e^{-W t} + \frac{W |\Delta|}{2\Omega} t \cos \Omega t \right) \tag{41}$$

Эта величина уменьшается от единицы при $t=0$ до значения $\frac{1}{2}(1+\Delta^2/\Omega^2)$ при $t \gg (1/\omega)$. Уменьшение числа фотонов во времени связано со следующим физическим обстоятельством. В начальный момент времени фотон представлял собой суперпозицию квантов среды с амплитудами $v_{k_0}^{(1)}$ и $v_{k_0}^{(2)}$ (см. (I 9), (I 50))

$$C_{k_0 \lambda_0}^+ |0\rangle = v_{k_0}^{(1)} \alpha_{k_0 \lambda_0}^{(1)+} |0\rangle + v_{k_0}^{(2)} \alpha_{k_0 \lambda_0}^{(2)+} |0\rangle \quad (42)$$

так что число квантов первого типа равно $|v_{k_0}^{(1)}|^2$ и второго $|v_{k_0}^{(2)}|^2$. С течением времени это число сохраняется (см. (34)). Но в результате процессов релаксации кванты становятся некогерентными и суперпозиция (42) превращается в смесь. Имея в виду, что в состоянии с одним квантом среды первого (второго) типа $\alpha_{k \lambda}^{(1)+} |0\rangle$ ($\alpha_{k \lambda}^{(2)+} |0\rangle$) фотон представлен с вероятностью $|v_k^{(1)}|^2$ ($|v_k^{(2)}|^2$), для числа фотонов n находим

$$n = |v_{k_0}^{(1)}|^4 + |v_{k_0}^{(2)}|^4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega^2} \right) \quad (43)$$

при $t \gg \frac{1}{\omega}$

Отметим, что при удалении от резонанса $|\Delta| \gg (1/\tau)$ все результаты, полученные при условии $\omega\tau \gg 1$ и $\omega\tau \ll 1$ совпадают.

III. Кинетические уравнения.

найденные выражения (например, формулы (19), (33), (38)) удовлетворяют определенным кинетическим уравнениям. Получение этих уравнений является более общей задачей, чем непосредственно результатов (19), (33), (38), т.к. кинетические уравнения позволяют решать задачи в более общей постановке.

Сформулируем кинетическое уравнение, которому удовлетворяет функция $n(\omega_k, t)$ при $\omega\tau \gg 1$. Нашей задачей является, прежде всего, получение уравнения для функции $n(\omega_k, \omega_l)$. Для этого заметим, что соотношение (18), как легко проверить, может быть записано в форме:

$$n(\omega_k, \omega_l) = \frac{i}{\omega_l + i\Gamma} \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + \frac{\Gamma \int n(\omega_{k'}, \omega_l) d\omega_{k'}}{\mathcal{I}[\omega^2 + (\Gamma - i\omega_l)^2]} \quad (44)$$

Переходя к временному представлению, получим

$$\dot{h}(\omega_k, t) = -\Gamma h(\omega_k, t) + \frac{\Gamma}{\mathcal{F}} \int_0^t d\omega_{k'} \int dt' h(\omega_{k'}, t') e^{-\Gamma(t-t')} \cos \mathcal{X}(t-t') \quad (45)$$

Получим соответствующие уравнения для области $W/\tau \ll 1$. Уравнение для функции h_{11} получается из (44), (45) заменой $\Gamma \rightarrow W_+$, $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_+$, $\omega_k \rightarrow \omega_{+k}$. Так во временном представлении имеем

$$\dot{h}_{11}(\omega_{+k}, t) = -W_+ h_{11}(\omega_{+k}, t) + \frac{W_+}{\mathcal{F}} \int d\omega'_+ \int h_{11}(\omega'_+, t') e^{-W_+(t-t')} \cos \mathcal{X}_+(t-t') dt' \quad (46)$$

Уравнение для функции h_{22} получается из (46) заменой $\omega_+ \rightarrow \omega_-$, $W_+ \rightarrow W_-$, $\mathcal{X}_+ \rightarrow \mathcal{X}_-$.

Уравнения (45), (46), (48) отличаются от обычных кинетических уравнений интегральным (во времени) характером столкновительного члена. Такая форма интегрального члена обусловлена учетом неопределенности энергии кванта, возникающей вследствие релаксационных процессов. Благодаря этой неопределенности δ -функция, выражающая закон сохранения энергии в отдельном акте рассеяния, переходит в функцию вида $\gamma/[(\omega_k - \omega_{k_0})^2 + \gamma^2]$, ширина которой γ зависит от времени. При стремлении γ к нулю уравнения приобретают обычный вид. Чтобы убедиться в этом рассмотрим, например, случай $W/\tau \gg 1$. Умножим уравнение (44) на $\omega_1 + i\Gamma$

$$(\omega_1 + i\Gamma) h(\omega_k, \omega_1) = i \delta(\omega_k - \omega_{k_0}) + + i \frac{\Gamma}{\mathcal{F}} \frac{\Gamma - i\omega_1}{\mathcal{X}^2 + (\Gamma - i\omega_1)^2} \int h(\omega_{k'}, \omega_1) d\omega_{k'}$$

Если мы воспользуемся приближенным равенством

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\Gamma - i\omega_1}{\mathcal{X}^2 + (\Gamma - i\omega_1)^2} \cong \delta(\mathcal{X})$$

то во временном представлении столкновительный член уже не будет интегральным (во времени).

Если, однако, мы интересуемся шириной распределения, то сохранение интегрального вида оператора столкновений (во времени) обязательно.

Отметим, наконец, что все результаты работы получены в предположении, что среда состоит из строго резонансных молекул. В реальных системах имеется определенный разброс энергетических уровней. Влияние этого разброса приведет к некоторой эффективной замене величины W шириной разброса и будет учтено в дальнейшем.

Авторы пользуются случаем выразить благодарность А.И. Алексееву за обсуждения работы.

Л и т е р а т у р а.

1. Ю.А.Вдовин, В.М.Галицкий. Элементарные электромагнитные возбуждения в системе резонансных молекул. Препринт.
2. Файн В.М. УФН ,79 , № 4, 641 (1963).

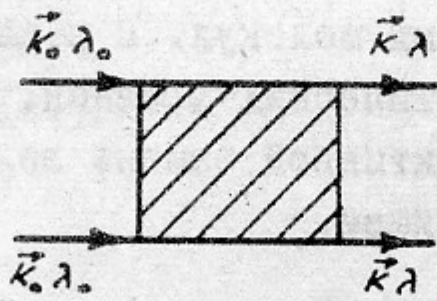


Рис 1

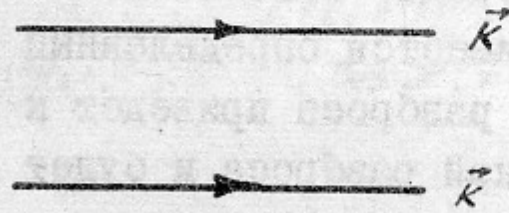


Рис 2

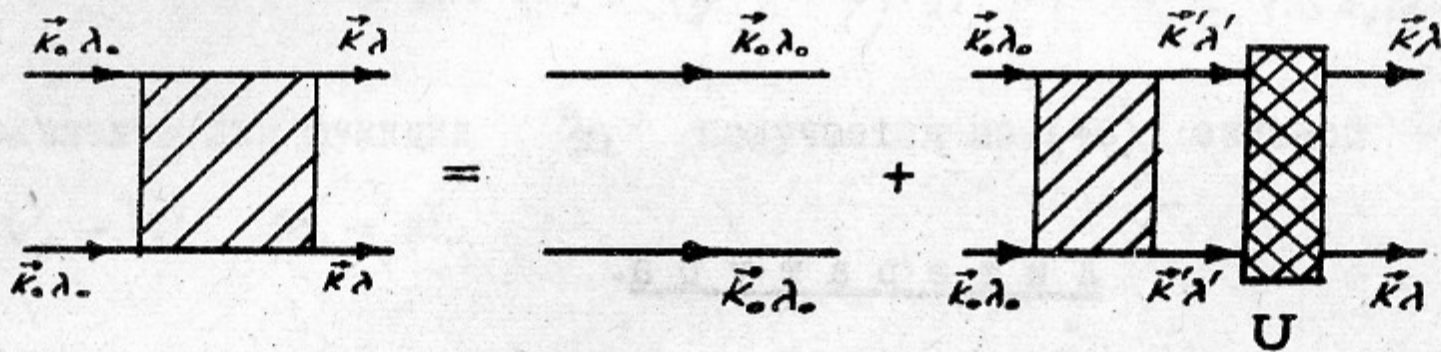


Рис 3

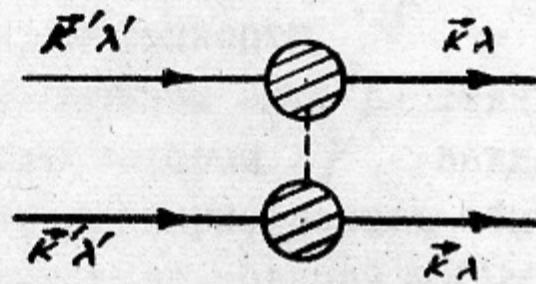


Рис 4

Ответственный за выпуск В.П.Яковлев, подписано к печати 18.03.65
МН07054, тираж 300, бесплатно

Отпечатано на роталпринте в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Ответственный за выпуск В.П.Яковлев, подписано к печати 18.03.65
МН07054, тираж 300, бесплатно

Отпечатано на роталпринте в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук СССР.